CENTERS OF MODULAR GROUP ALGEBRAS

YOSHIHIRO OTOKITA

Abstract. In this note, we consider the Loewy structure of the center of a modular group algebra. Let G be a finite group and F an algebraically closed field of characteristic $p > 0$. We denote by $\mathcal{Z}$ the center of the group algebra FG. For a primitive idempotent b in $\mathcal{Z}$, it is known that $\mathcal{Z}b$ is a local algebra in the sense that its Jacobson radical has codimension 1. Our studies focus on the Loewy series of $\mathcal{Z}b$ and its length L. In 1981, Okuyama has proved that L is bounded above by the order of a defect group of b. The main purpose in this note is to give new upper and lower bounds on L. A part of these results is based on a joint work with Burkhard Külshammer and Benjamin Sambale.

1. 序論

本稿は第５１回環論および表現論シンポジウム（岡山理科大学，2018年９月）における講演の要約と補足である．ここで述べる結果の一部にはBurkhard Külshammer, Benjamin Sambaleとの共同研究 [4] を含む.

以下ではGを有限群，Fを標数$p > 0$の代数的閉体，これらから構成される群環をFGとする．本研究の目的は，この中心$\mathcal{Z}$とそのJacobson 根基J，およびGの群論的性質の関係性を明らかにすることである．$\mathcal{Z}$の原始べき等元bに対し，FGbは両側イデアルとしてFGの直既約な直和因子となり，これをブロックという．FGbの中心は$\mathcal{Z}b$と一致し，これは可換局所環であることが知られている．したがって唯一の極大イデアルを持ち，Jbと表せる．このべき乗を並べることでイデアルの列（Loewy 列）

$$0 = J^L b \subsetneq \cdots \subsetneq J^2 b \subsetneq J^1 b \subsetneq \mathcal{Z}b$$

とその長さ

$$L = \min\{l > 0 \mid J^l b = 0\}$$

が定義される．この列における重要な問題の１つは「Lがどのような値を取り得るか？」である．いくつかの既知の結果ではLの上限，および特別な群に対しての値が求められている（前者はOkuyama [5], 後者はBrough-Schwabrow [1] など）．そこで本稿ではブロックと関連するGの特別なp-部分群を用いてLに関する２つの新たな不等式を与える.

2. 不足群

以下ではブロックFGbをBと書く.

ブロックの構造を特徴付けるための特別なp-群が次のように定義される.

Gの任意の部分群Hに対し,

$$\mu_H : B \otimes_{FH} B \to B, \quad \beta_1 \otimes \beta_2 \mapsto \beta_1\beta_2$$

はB-両側加群としての全射な準同型写像となる．このとき次の２条件を満たすGのp-部分群Dが存在する.

The detailed version of this paper has been submitted for publication elsewhere.

(1) μ_D は分裂する．
(2) μ_H が分裂するならば，$D \subseteq g^{-1}Hg$ となる $g \in G$ が存在する．

すなわち D は μ_H が分裂する中で共役の差を除いて一意的に定まる最小の部分群である．これを B の不足群（defect group）という．この群がブロックの構造にどのような影響を与えるかは次の補題からわかる（ここでは加群として有限生成な右加群を扱う）．

Lemma 1. 任意の直既約 B-加群は，ある直既約 FD-加群を FG へ誘導した加群の直和因子として得られる．

Proof. V を直既約 B-加群とする．$\mu_D : B \otimes_{FD} B \to B$ が分裂するので

$$V \otimes_B B \otimes_{FD} B \to V \otimes_B B \to 0$$

も分裂する．よって V の FD への制限を $V\downarrow_{FD} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ と直既約分解すると

$$V \mid V\downarrow_{FD} \otimes_{FD} B \mid (W_1 \oplus \cdots \oplus W_s) \otimes_{FD} FG \simeq (W_1 \otimes_{FD} FG) \oplus \cdots \oplus (W_s \otimes_{FD} FG)$$

が成り立つ．したがって，ある $1 \le i \le s$ に対し $V \mid W_i \uparrow^{FG}$.

□

これにより B の半単純性や表現型を不足群で特徴付けることができる．

Theorem 2. ブロック B の不足群を D とすると次が成り立つ（例えば [2] 参照）．
(1) B が半単純環（したがって特に単純環）
$\Leftrightarrow$ D が自明な群.
(2) B が有限表現型
$\Leftrightarrow$ D が巡回群.
(3) B が tame 表現型
$\Leftrightarrow$ $p = 2$ で D は位数 4 の Klein 群，二面体群，一般四元数群，準二面体群のいずれか.

特に（２）の有限表現型の場合には次が成り立つ．

Theorem 3 (Rickard [7])**.** 不足群 D が巡回群のとき，ブロック B は群環 $F[D \rtimes E]$ と導来同値となる．ここで E は B の惰性商群（inertial quotient）である．

ここでは「惰性商群」の定義は省略するが，これは D の自己同型群 Aut(D) のある p'-部分群と同型となる．よって上の仮定では E は巡回群となり，その位数は $p-1$ の約数である．

さて，ブロックの中心 $\mathcal{Z}b$ の次元について次の 2 つの予想が知られている．

(C1) Brauer 予想 (1963)
「$\dim \mathcal{Z}b \le |D|$ ではないか？」

(C2) Héthelyi-Külshammer 予想 (2000)
「D が非自明なとき $2\sqrt{p-1} \leq \dim \mathcal{Z}b$ ではないか？」

D が自明な群のときは Theorem 2 より常に $\dim \mathcal{Z}b = 1$ であるから，予想 (C2) ではこの場合を除外している．また D が巡回群のときは Theorem 3 より

$$\dim \mathcal{Z}b = \frac{|D|-1}{|E|} + |E|$$

なので

$$2\sqrt{|D|-1} \leq \dim \mathcal{Z}b \leq |D|$$

が成り立つ．しかし，どちらの予想も未だ一般的な解決には至っていない．そこで $\mathcal{Z}b$ の環論的構造を精査するため，次章ではその Loewy 列を考える．

3. 中心の Loewy 列

群環 FG の中心を $\mathcal{Z}$，その Jacobson 根基を J とすると，ブロック $B = FGb$ の中心とその Jacobson 根基はそれぞれ $\mathcal{Z}b, Jb$ と表される．これにより $\mathcal{Z}b$ の Loewy 列

$$0 = J^L b \subsetneq \cdots \subsetneq J^2 b \subsetneq J^1 b \subsetneq \mathcal{Z}b$$

とその長さ

$$L = \min\{l > 0 \mid J^l b = 0\}$$

が得られる．前章に挙げた 2 つの予想は $\mathcal{Z}b$ の次元に関するものだが，これらが解決されているのはいくつかの特別な場合に限られており，完全な解決は容易ではない．そこで本稿では次元の代わりに長さ L に着目する．この上限について Okuyama (1981) は次を示した．

Theorem 4 (Okuyama [5])**.** $L \leq |D|$（ただし $|D|$ は不足群の位数）.

Loewy 列は狭義上昇（または下降）列であるから，Brauer 予想が正しければ上の定理はその系として導くことができる．また不足群が巡回群の場合は次の結果が知られている．

Theorem 5 (Koshitani-Külshammer-Sambale [3])**.** ブロック B の惰性商群を E とする．不足群 D が巡回群のとき

$$L = \frac{|D|-1}{|E|} + 1.$$

また Loewy 列の各次元について

$$\dim J^{n-1}b/J^n b = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ |E| & (n=2) \\ 1 & (3 \leq n \leq L) \end{cases}$$

が成り立つ．

以上より，本研究においては D が非巡回群の場合の L について，その値や上限，下限を求めることが目標となる．次章ではこれらに関する新たな２つの不等式を与える．

4. 主結果

本稿の主結果は次の通りである（[4]，および [6]）．

Theorem 6. ブロック B の不足群を D，その位数を p^d とするとき次が成り立つ．

(1) D が非巡回群のとき
$$L \leq p^{d-1} + p - 1.$$

(2) D の中心 $Z(D)$ の指数（各元の位数の最大値）を p^m とすると
$$\frac{p^m + p - 2}{p-1} \leq L.$$

特に $Z(D)$ が非初等的（すなわち $m \neq 1$）のとき $2\sqrt{p-1} < p + 2 \leq L$.

この定理から D が非巡回群のとき，L は位数 p^d に比べて小さい値を持つことがわかる．また（２）より，$Z(D)$ が非初等的なときは Héthelyi-Külshammer 予想より強い不等式が成り立つ．

最後に主結果についての注意を述べる．上の定理の（１）は D の位数を用いて L の上限を与えている．では下限について同じことができないかと期待したくなるが，次の例が示すように一般には不可能である．

Remark 7. 整数 $a \geq 1$ に対し
$$G = \left\{ \begin{bmatrix} u & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \ ; \ u \in \mathbb{F}_q^\times, \quad v \in \mathbb{F}_q \right\}$$
（ただし $q = p^a$）とすると群環 FG は直既約であり，それ自身がブロックとなる．この不足群は G の Sylow p-部分群と一致し，位数 p^a の初等可換群（つまり $m = 1$ の場合）である．このとき a の値に依らず常に $L = 2$ が成り立つ．

References

[1] J. Brough and I. Schwabrow, *On centres of* 3*-blocks of the Ree groups* ${}^2G_2(q)$, J. Algebra **492** (2017), 57–73.

[2] J. E. Humphreys, Modular representations of finite groups of Lie type, London Math. Soc. Lecture Note Series **326** (Cambridge University Press, 2006).

[3] S. Koshitani, B. Külshammer and B. Sambale, *On Loewy lengths of blocks*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **156** (2014), 555–570.

[4] B. Külshammer, Y. Otokita and B. Sambale, *Loewy lengths of centers of blocks II*, to appear in Nagoya Math. J.

[5] T. Okuyama, *On the radical of the center of a group algebra*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 406–408.

[6] Y. Otokita, *Lower bounds on Loewy lengths of centers of blocks*, submitted.

[7] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), 303–317.

Department of Mathematics and Informatics
Chiba University
JAPAN

E-mail address: otokita@chiba-u.jp